TD n°14 : étude d'une famille de fonctions

Pour tout réel λ, on définit l'application f_λ par $f_\lambda(x) = (x-\lambda)^x$.
On note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ.

1. Préciser le domaine de définition $\mathcal{D}_\lambda$ de f_λ, ainsi que la limite $\ell_\lambda = \lim\limits_{x\to\lambda^+} f_\lambda(x)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.
2. Quand ℓ_λ est finie, étudier l'allure de $\mathcal{C}_\lambda$ au voisinage de (λ, ℓ_λ).
3. On note u_λ l'application définie sur $\mathcal{D}_\lambda$ par $f'_\lambda(x) = u_\lambda(x) f_\lambda(x)$.
   (a) Si $\lambda < 0$, montrer que u_λ ne s'annule qu'une seule fois.
   En déduire le tableau des variations de f_λ dans ce cas.
   (b) Etudier les variations de f_λ quand $\lambda = 0$.
4. (a) Etudier les variations de u_λ quand $\lambda > 0$. En déduire que :
   – Si $\lambda > \mathrm{e}^{-2}$, alors $u_\lambda(x) > 0$ pour tout x de $\mathcal{D}_\lambda$.
   – Si $\lambda = \mathrm{e}^{-2}$, alors $u_\lambda(x) \geqslant 0$ sur $\mathcal{D}_\lambda$ et ne s'annule qu'en un seul point.
   – Si $0 < \lambda < \mathrm{e}^{-2}$, alors $u_\lambda(x)$ s'annule en μ_1, μ_2, avec $\lambda < \mu_1 < 2\lambda < \mu_2$.
   (b) En déduire les différents tableaux de variations possibles pour f_λ quand $\lambda > 0$.
5. Étudier le placement respectif des courbes $y = f_{\lambda_1}(x)$ et $y = f_{\lambda_2}(x)$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
6. Construire sur un même graphique les représentations graphiques des applications f_λ pour chacun des cas rencontrés dans ce problème.